I тур Олімпіади з математики КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019

ІАТ 1-й курс

1. Для яких значення параметра t система $\begin{cases} x+(t+1)y=1, \\ tx+t^2y-z=t-2, \\ 2x+ty-tz=-2 \end{cases}$

1) має єдиний розв'язок; 2) має безліч розв'язків; 3) не має розв'язків?

Знайдіть ці розв'язки.

2. Обчисліть визначник $\begin{vmatrix} z & z^2 & \dots & z^{2019} & z^{2020} \\ z^2 & z^3 & \dots & z^{2020} & z \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z^{2019} & z^{2020} & \dots & z^{2017} & z^{2018} \\ z^{2020} & z & \dots & z^{2018} & z^{2019} \end{vmatrix}$

для $z=i \quad (i^2=-1)$.

3. Знайдіть $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos\sqrt{2019x}\right)^{\frac{1}{2019x}}$.

4. Знайдіть значення параметра a, для якого функція

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{ax}-e^{x}}{\sqrt[2019]{1+2019x}-1}, & x<0, \\ 1, & x\geq 0 \end{cases} \text{ є неперервною.}$$

5. Позначмо через D множину точок площини, що містяться всередині квадрата з вершинами $(1;1),(-1;1),(-1;-1),(1;-1)$. Зобразити геометричне місце таких точок Y на площині, що $(\overline{OX},\overline{OY})\leq 1$ для будь-якої точки $X\in D$, де $(\overline{x},\overline{y})$ — скалярний добуток векторів $\overline{x}$ та $\overline{y}$.

6. З набору цілих чисел $\vec{a}=(a_1;a_2;...;a_{2019})$ сформовано новий набір за правилом $\vec{a}'=\left(\dfrac{a_1+a_2}{2};\dfrac{a_2+a_3}{2};...;\dfrac{a_{2018}+a_{2019}}{2};\dfrac{a_{2019}+a_1}{2}\right)$. Визначити всі набори $\vec{a}$, для яких усі елементи всіх наборів $\vec{a}',\vec{a}'',\vec{a}''',...$ є цілими числами.

Розбір завдань I туру олімпіади відбудеться на засіданні математичного гуртка.
Деталі на http://www.facebook.com/groups/math.olymp.kpi/
Результати олімпіади будуть опубліковані на сайті http://matan.kpi.ua

I тур Олімпіади з математики КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019

ІАТ Старші курси

1. Для многочлена $P(x) = (1 + 2019x + x^{10})^{200}(2019 + x^{19})$ знайдіть:

1) $P^{(2019)}(x)$; 2) $P^{(2020)}(x)$.

2. Обчисліть визначник

$$\begin{vmatrix} z & z^2 & \dots & z^{2019} & z^{2020} \\ z^2 & z^3 & \dots & z^{2020} & z \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z^{2019} & z^{2020} & \dots & z^{2017} & z^{2018} \\ z^{2020} & z & \dots & z^{2018} & z^{2019} \end{vmatrix} \text{ для } z = i \quad (i^2 = -1).$$

3. Обчисліть площу області між кривою $y = x^3 - 3x^2 - 18x + 40$ та віссю Ox на відрізку $[0;6]$.

4. Знайдіть розв'язок диференціального рівняння $y'' - y' - Ry = 0$, який справджує умови: $y'(0) = R$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = 0$, якщо R — радіус збіжності ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(x-2019)^{2n}}{4^n}$.

5. Числову послідовність $\{x_n\}, n \in \mathbb{N}$, визначено рекурентним співвідношенням:

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_{n+1} = \dfrac{\sqrt{x_n^2 + 4x_n} + x_n}{2}. \end{cases}$$

Доведіть збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{x_n^2}$ та знайдіть його суму.

6. Знайдіть найменше значення виразу $\sum\limits_{j=1}^{2019} \sum\limits_{i=1}^{j} a_i a_j$, де $a_1, \dots, a_{2019} \in [-1;1]$.

Розбір завдань І туру олімпіади відбудеться на засіданні математичного гуртка.
Деталі на http://www.facebook.com/groups/math.olymp.kpi/
Результати олімпіади будуть опубліковані на сайті http://matan.kpi.ua

I тур Олімпіади з математики КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019
ІТС 1-й курс

1. Для яких значення параметра t система $\begin{cases} x+(t+1)y=1, \\ tx+t^2y-z=t-2, \\ 2x+ty-tz=-2 \end{cases}$

1) має єдиний розв'язок; 2) має безліч розв'язків; 3) не має розв'язків?

Знайдіть ці розв'язки.

2. Обчисліть визначник $\begin{vmatrix} z & z^2 & \dots & z^{2019} & z^{2020} \\ z^2 & z^3 & \dots & z^{2020} & z \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z^{2019} & z^{2020} & \dots & z^{2017} & z^{2018} \\ z^{2020} & z & \dots & z^{2018} & z^{2019} \end{vmatrix}$

для $z=i \quad (i^2=-1)$.

3. Знайдіть $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos\sqrt{2019x}\right)^{\frac{1}{2019x}}$.

4. Знайдіть значення параметра a, для якого функція

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{ax}-e^x}{\sqrt[2019]{1+2019x}-1}, & x<0, \\ 1, & x\ge 0 \end{cases} \text{ є неперервною.}$$

5. Позначмо через D множину точок площини, що містяться всередині квадрата з вершинами $(1;1),(-1;1),(-1;-1),(1;-1)$. Зобразити геометричне місце таких точок Y на площині, що $(\overline{OX},\overline{OY})\le 1$ для будь-якої точки $X\in D$, де $(\overline{x},\overline{y})$ — скалярний добуток векторів $\overline{x}$ та $\overline{y}$.

6. З набору цілих чисел $\vec{a}=(a_1;a_2;\dots;a_{2019})$ сформовано новий набір за правилом $\vec{a}'=\left(\dfrac{a_1+a_2}{2};\dfrac{a_2+a_3}{2};\dots;\dfrac{a_{2018}+a_{2019}}{2};\dfrac{a_{2019}+a_1}{2}\right)$. Визначити всі набори $\vec{a}$, для яких усі елементи всіх наборів $\vec{a}',\vec{a}'',\vec{a}''',\dots$ є цілими числами.

Розбір завдань I туру олімпіади відбудеться на засіданні математичного гуртка.
Деталі на http://www.facebook.com/groups/math.olymp.kpi/
Результати олімпіади будуть опубліковані на сайті http://matan.kpi.ua

I тур Олімпіади з математики КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019

ІТС Старші курси

1. 1. Для многочлена $P(x) = (1 + 2019x + x^{10})^{200}(2019 + x^{19})$ знайдіть:

1) $P^{(2019)}(x)$; 2) $P^{(2020)}(x)$.

2. Обчисліть визначник

$$\begin{vmatrix} z & z^2 & \dots & z^{2019} & z^{2020} \\ z^2 & z^3 & \dots & z^{2020} & z \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z^{2019} & z^{2020} & \dots & z^{2017} & z^{2018} \\ z^{2020} & z & \dots & z^{2018} & z^{2019} \end{vmatrix} \text{ для } z = i \quad (i^2 = -1).$$

3. Обчисліть площу області між кривою $y = x^3 - 3x^2 - 18x + 40$ та віссю Ox на відрізку $[0;6]$.

4. Знайдіть розв'язок диференціального рівняння $y'' - y' - Ry = 0$, який справджує умови: $y'(0) = R$, $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = 0$, якщо R — радіус збіжності ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(x - 2019)^{2n}}{4^n}$.

5. Числову послідовність $\{x_n\}, n \in \mathbb{N}$, визначено рекурентним співвідношенням:

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_{n+1} = \dfrac{\sqrt{x_n^2 + 4x_n} + x_n}{2}. \end{cases}$$

Доведіть збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{x_n^2}$ та знайдіть його суму.

6. Знайдіть найменше значення виразу $\sum\limits_{j=1}^{2019} \sum\limits_{i=1}^{j} a_i a_j$, де $a_1, \dots, a_{2019} \in [-1;1]$.

Розбір завдань I туру олімпіади відбудеться на засіданні математичного гуртка.
Деталі на http://www.facebook.com/groups/math.olymp.kpi/
Результати олімпіади будуть опубліковані на сайті http://matan.kpi.ua